УДК: 623

О НОВОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЗНАЧЕННОГО СРОКА ХРАНЕНИЯ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ УСТРОЙСТВ ВЗРЫВООПАСНЫХ СИСТЕМ ОДНОРАЗОВОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

ABOUT A NEW METHOD OF DETERMINING THE APPOINTED STORAGE TIME OF NON-RESTORABLE DEVICES OF EXPLOSIVE DISPOSABLE SYSTEMS OF DISPOSABLE USE

Чл.-корр. РАРАН ***В.И. Волчихин[1], Д.В. Искоркин[2], Д.С. Курков[1]***

[1]Пензенский государственный университет, [2]Филиал ВА МТО им. А.В Хрулева, г. Пенза

V.I. Volchikhin, D.V. Iskorkin, D.S. Kurkov

Предложен новый метод определения назначенного срока хранения до списания невосстанавливаемых устройств взрывоопасных систем одноразового использования, описывающий совместное возникновение внезапных и постепенных (параметрических) отказов рассматриваемых устройств по усеченному показательному закону, а при неравной нулю левой границе времени эксплуатации — обобщенному усеченному показательному закону распределения.
Ключевые слова: назначенный срок хранения, этап хранения, усеченный и обобщенный усеченный показательный законы распределения, внезапные и постепенные отказы, функция плотности вероятности.

A new method is proposed for determining the designated storage period for non-recoverable devices of explosive hazardous disposable systems, which describes the joint occurrence of sudden and gradual (parametric) failures of the devices under consideration according to a truncated exponential law, and when the left-hand time boundary is non-zero, a generalized truncated exponential distribution law.
Keywords: designated shelf life, storage phase, truncated and generalized truncated exponential distribution laws, sudden and gradual failures, probability density function.

Назначенный срок хранения до списания (НСХС) в соответствии с ГОСТ 27.003-2016 [1] является оценочным критерием одного из свойств надежности (сохраняемости) боеприпасов, представляющих взрывоопасные системы одноразового использования (ВОСОИ) и устанавливается с целью своевременного изъятия с этапа хранения невосстанавливаемых комплектуемых устройств, к которым относятся взрыватели и средства воспламенения, с целью предупреждения их отказов при боевом применении изделий [2].

В настоящее время проблема прогнозирования технического состояния (ТС) рассматриваемых устройств остается, как отмечается в статье Мясникова А.С. [3], не раскрытой. Автор в своей работе предложил оригинальный способ определения предельно допустимого срока эксплуатации (хранения) невосстанавливаемых устройств по признаку безотказности т.е., по известным статистическим данным их отказов на стадии эксплуатации.

Известно, что этап хранения боеприпасов, укомплектованных такими устройствами, занимает до 85% продолжительности стадии эксплуатации [4], и их ТС во многом определяет безотказность ВОСОИ при применении по назначению. Поэтому определение НСХС для невосстанавливаемых устройств представляет актуальную научную задачу, решение которой позволит своевременно изымать их с этапа хранения в разных климатических зонах и условиях (хранилище, открытая площадка).

В работе [3] предложена физическая и математическая модели совместного возникновения внезапных и постепенных (параметрических) отказов в рассматриваемых устройствах, имеющих случайный характер и описываемых минимальной из двух случайных величин (СВ), распределённых по показательному и нормальному законам. Однако в рассмотренных моделях присутствуют ошибки, имеющие принципиальный характер и связанные с некорректным определением математического ожидания (МОЖ) СВ, распределенной по показательному закону, ограниченной справа временем хранения области допустимых значений (ОДЗ). Такая подмена объективных законов распределения СВ приводит к некорректным выводам, в частности о характере поведения коэффициента неисправного состояния, приводимого в работе [3], и предлагаемых автором назначенных сроках эксплуатации изделий.

В этом случае, необходимо более детально рассматривать постепенный отказ как от СВ, распределённых по усеченному показательному закону, а при неравной нулю левой границе времени эксплуатации ВОСОИ — по обобщенному усеченному показательному закону распределения. Поэтому возникла необходимость уточнения предлагаемых физической и математической моделей совместного возникновения внезапных и постепенных отказов в невосстанавливаемых устройствах ВОСОИ для определения их НСХС.

Математическая поставка задачи. Исследуется случайный процесс возникновения постепенного отказа невосстанавливаемого устройства, при этом среднее время генеральной совокупности подчинено показательному закону распределения, которому отвечает функция плотности

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t_{\text{x}}},$$

где λ, 1/год — интенсивность постепенных отказов и функция плотности вероятности (ф.п.в.) и t_{x} — время хранения невосстанавливаемых устройств

$$f(t) = dF(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t_{\text{x}}}.$$

Время наблюдения за СВ ограничено величиной t_{x}. За указанный промежуток времени часть устройств откажет, а другая — останется в исправном состоянии. Требуется определить интенсивность потока постепенных отказов генеральной совокупности λ по результатам наблюдений за СВ (лабораторных испытаний невосстанавливаемых устройств) в ограниченное время t_{x}.

Обозначим ф.п.в. новой СВ, подчинённой усечённому показательному распределению, через $f_2(t) = c\lambda e^{-\lambda t_{\text{x}}}$, где c — const.

Она, как и любая ф.п.в., должна отвечать требованию неотрицательности, а интеграл в области допустимых значений должен быть равен единице, т.е.

$$\int_0^{t_{\text{x}}} f_2(t)dt = \int_0^{t_{\text{x}}} c\lambda e^{-\lambda t}dt = c\lambda \int_0^{t_{\text{x}}} e^{-\lambda t}dt =$$
$$= \frac{c\lambda}{-\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_{\text{x}}} = -c\left(e^{-\lambda t_{\text{x}}} - 1\right) = 1.$$

Таким образом,

$$c = \frac{1}{1 - e^{-\lambda t_{\text{x}}}}.$$

Для оценки справедливости проведённых вычислений найдём значение постоянной c при $t_{\text{x}} \to \infty$

$$\lim_{t_{\text{x}} \to \infty} c = 1.$$

Это соответствует ф.п.в. показательного распределения и подтверждает правильность выполненных преобразований. Из этого следует, что усечённое показательное распределение в пределе стремится к порождающему её показательному распределению. Окончательно ф.п.в. усечённого показательного распределения имеет вид

$$f_2(t) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda t_{\text{x}}}} e^{-\lambda t}. \qquad (1)$$

Графики ф.п.в. показательного и усечённого показательного распределения показаны на рис. 1.

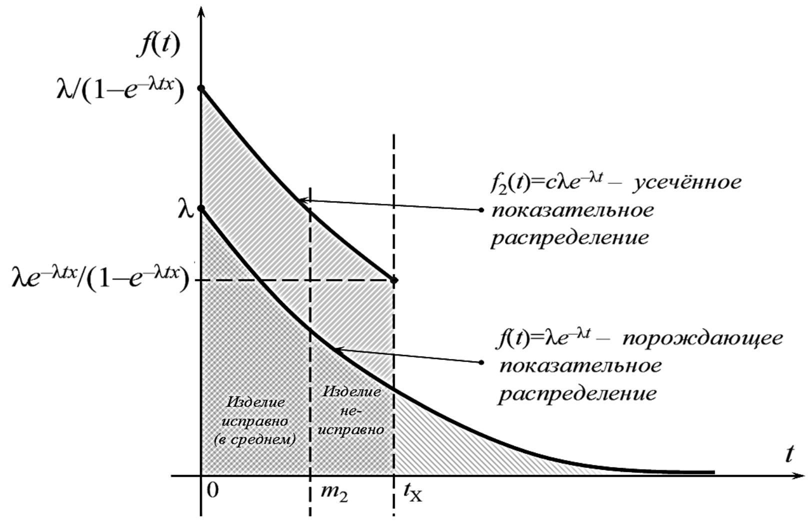


Рис. 1. Функции плотности вероятностей показательного и усечённого показательного распределений СВ

Найдём МОЖ СВ, распределённой по усечённому показательному распределению

$$m_2 = \int_0^{t_x} t f_2(t)dt = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t_x}} \int_0^{t_x} t e^{-\lambda t} dt. \qquad (2)$$

Далее интегрируем по частям, принимая $u = t$, $e^{-\lambda t}dt = dv$, откуда $du = dt$, $v = -e^{-\lambda t}/\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t}}\left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{t_x} e^{-\lambda t}dt\right] = \\ &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t_x}}\left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_x}\right] = \\ &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t_x}}\left[-\frac{t_x}{\lambda}e^{-\lambda t_x} - \frac{1}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda t_x}-1\right)\right] = \\ &= \frac{t_x e^{-\lambda t_x}}{e^{-\lambda t_x}-1} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{t_x e^{-\lambda t_x}}{1-e^{-\lambda t_x}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Проверим справедливость полученного выражения, как и в предыдущем случае при $t_x \to \infty$

$$\lim_{t_x \to \infty} \frac{1}{\lambda} - \frac{t_x e^{-\lambda t_x}}{1-e^{-\lambda t_x}}. \qquad (4)$$

Неопределённость второго слагаемого вида $\infty \times 0$, появляющуюся в числителе, раскроем с помощью правила Лопиталя

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda} - \lim_{t_x\to\infty}\frac{t_x e^{-\lambda t_x}}{1-e^{-\lambda t_x}} = \frac{1}{\lambda} - \lim_{t_x\to\infty}\frac{t_x}{e^{\lambda t_x}} = \\ &= \frac{1}{\lambda} - \lim_{t_x\to\infty}\frac{(t_x)'}{\left(e^{\lambda t_x}\right)'} = \frac{1}{\lambda} - \lim_{t_x\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda t_x}} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Так как выражение $e^{-\lambda t_x}$ при $t_x > 0$ всегда положительно и не превышает единицы, то второе слагаемое в (4) всегда больше нуля, поэтому $m_2 < m$, что соответствует объективной реальности.

Сходимость МОЖ усечённого показательного распределения к МОЖ классического показательного распределения при $t_x \to \infty$ подтверждает справедливость выполненных преобразований. Кроме того, справедливость полученного выражения подтверждена численным методом в среде Mathcad (рис. 2) путём сравнения результатов расчётов по формулам (2) и (3).

Полученная зависимость имеет следующее практическое значение. Имея статистический ряд времён отказов однотипных невосстанавливаемых устройств t_{2i}, полученный в результате проведения лабораторных испытаний при ограниченном времени наблюдений t_x, можно найти оценку МОЖ времени наработки до отказа по известной статистической зависимости

$$M[t_2] = \sum_{i=1}^{n} t_{2\,i}\ .$$

Решая полученное уравнение, связывающее МОЖ и параметр λ, относительно неизвестной интенсивности постепенных отказов λ, можно определить её значение из выражения

$$M[t_2] = \frac{1}{\lambda} - \frac{t_x e^{-\lambda t_x}}{1-e^{-\lambda t_x}}. \qquad (5)$$

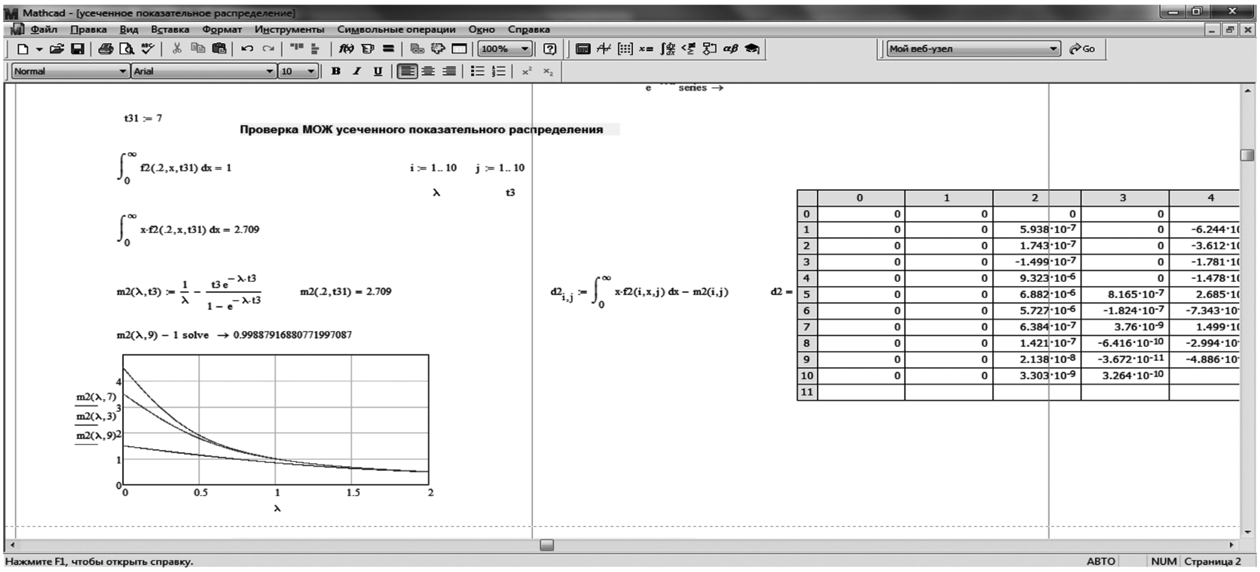


Рис. 2. Рабочий лист MathCad сравнения МОЖ усечённого показательного закона распределения

Полученное уравнение не может быть разрешено аналитически относительно λ, однако численное решение (5) не вызывает каких-либо вычислительных трудностей.

Определим второй начальный момент α_2 СВ, распределённой по усечённому показательному закону распределения

$$\alpha_2 = \int_0^{t_x} t^2 f_2(t)dt = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t_x}} \int_0^{t_x} t^2 e^{-\lambda t} dt .$$

Для этого интегрируем по частям, принимая $u = t^2$, $e^{-\lambda t}dt = dv$ откуда $du = 2tdt, v = -e^{-\lambda t}/\lambda$, и далее вновь интегрируем по частям, используя новые функции $u = t$, $e^{-\lambda t}dt = dv$, откуда

$$du = dt,\ \ v = -e^{-\lambda t}/\lambda ,$$

тогда

$$2\int_0^{t_x} te^{-\lambda t}dt = 2\left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{t_x} e^{-\lambda t}dt \right] =$$
$$= 2\left[-\frac{t_x}{\lambda}e^{-\lambda t_x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\Big|_0^{t_x} \right] =$$
$$= 2\left[-\frac{t_x}{\lambda}e^{-\lambda t_x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t_x} + \frac{1}{\lambda^2} \right],$$

поэтому

$$\alpha_2 = \frac{1}{1-e^{-\lambda t_x}} \left\{ \begin{array}{c} -t_x^2 e^{-\lambda t_x} + \\ +2\left[-\frac{t_x}{\lambda}e^{-\lambda t_x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t_x} + \frac{1}{\lambda^2} \right] \end{array} \right\}.$$

Окончательно дисперсия СВ времени первого отказа $D[t]$ может быть найдена по зависимости

$$D[t] = \alpha_2 - m_2^{\,2} = \frac{1}{1-e^{-\lambda t_x}} \times$$
$$\times \left\{ -t_x^2 e^{-\lambda t_x} + 2\left[-\frac{t_x}{\lambda}e^{-\lambda t_x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t_x} + \frac{1}{\lambda^2} \right] \right\} -$$
$$-\left(\frac{t_э e^{-\lambda t_э}}{e^{-\lambda t_э} - 1} + \frac{1}{\lambda} \right)^2 . \qquad (6)$$

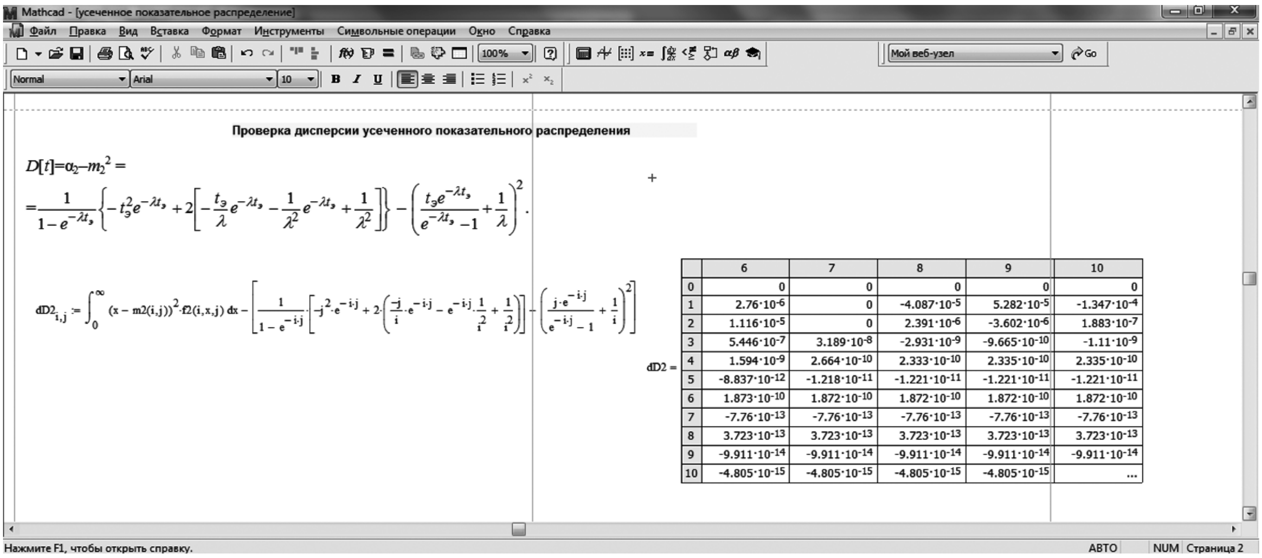
Проверим справедливость полученного выражения, как и в предыдущих случаях, вычислив предел значения дисперсии при $t_x \to \infty$.

Как и ранее при раскрытии неопределённости в выражении $t_x^2 e^{-\lambda t_x}$ вида $0 \times \infty$ дважды использовалось правило Лопиталя

$$\lim_{t_x \to \infty} t_x^2 e^{-\lambda t_x} = \lim_{t_x \to \infty} \frac{t_x^2}{e^{\lambda t_x}} =$$
$$= \lim_{t_x \to \infty} \frac{\left(t_x^2\right)'}{\left(e^{\lambda t_x}\right)'} = \lim_{t_x \to \infty} \frac{2t_x}{\lambda e^{\lambda t_x}} =$$
$$= \lim_{t_x \to \infty} \frac{\left(2t_x\right)'}{\left(\lambda e^{\lambda t_x}\right)'} = \lim_{t_x \to \infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda t_x}} = 0.$$

Полученное выражение (6) соответствует дисперсии классического показательного распределения [5, 8–12]. Справедливость полученного выражения также подтверждена численным методом в среде Mathcad (рис. 3).

При совпадении левой границы ф.п.в. с нулем, усечённое показательное распределе-



	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0
1	$2.76\cdot10^{-6}$	0	$-4.087\cdot10^{-5}$	$5.282\cdot10^{-5}$	$-1.347\cdot10^{-4}$
2	$1.116\cdot10^{-5}$	0	$2.391\cdot10^{-6}$	$-3.602\cdot10^{-6}$	$1.883\cdot10^{-7}$
3	$5.446\cdot10^{-7}$	$3.189\cdot10^{-8}$	$-2.931\cdot10^{-9}$	$-9.665\cdot10^{-10}$	$-1.11\cdot10^{-9}$
4	$1.594\cdot10^{-9}$	$2.664\cdot10^{-10}$	$2.333\cdot10^{-10}$	$2.335\cdot10^{-10}$	$2.335\cdot10^{-10}$
5	$-8.837\cdot10^{-12}$	$-1.218\cdot10^{-11}$	$-1.221\cdot10^{-11}$	$-1.221\cdot10^{-11}$	$-1.221\cdot10^{-11}$
6	$1.873\cdot10^{-10}$	$1.872\cdot10^{-10}$	$1.872\cdot10^{-10}$	$1.872\cdot10^{-10}$	$1.872\cdot10^{-10}$
7	$-7.76\cdot10^{-13}$	$-7.76\cdot10^{-13}$	$-7.76\cdot10^{-13}$	$-7.76\cdot10^{-13}$	$-7.76\cdot10^{-13}$
8	$3.723\cdot10^{-13}$	$3.723\cdot10^{-13}$	$3.723\cdot10^{-13}$	$3.723\cdot10^{-13}$	$3.723\cdot10^{-13}$
9	$-9.911\cdot10^{-14}$	$-9.911\cdot10^{-14}$	$-9.911\cdot10^{-14}$	$-9.911\cdot10^{-14}$	$-9.911\cdot10^{-14}$
10	$-4.805\cdot10^{-15}$	$-4.805\cdot10^{-15}$	$-4.805\cdot10^{-15}$	$-4.805\cdot10^{-15}$	...

Рис. 3. Рабочий лист MathCad сравнения дисперсий усечённого показательного закона распределения

ние постепенного отказа невосстанавливаемого устройства имеет вид зависимости (1). В общем случае, когда левая граница ф.п.в. не совпадает с нулем и равна произвольному значению t_0, значение коэффициента пропорциональности $c_з$ будет другим.

Обозначим ф.п.в. новой СВ, подчинённой обобщённому усечённому показательному распределению, через $f_з(t) = c_з \lambda e^{-\lambda t}$, где $c_з$ — const. Она, как и любая ф.п.в., должна отвечать требованию не отрицательности, а интеграл в области допустимых значений (ОДЗ) должен быть равен единице, т.е.

$$\int_{t_0}^{t_x} f_з(t)dt = \int_{t_0}^{t_x} c_з \lambda e^{-\lambda t} dt = c_з \lambda \int_{t_0}^{t_x} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{c_з \lambda}{-\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{t_x} = -c_з \left(e^{-\lambda t_x} - e^{-\lambda t_0} \right) = 1.$$

Таким образом, коэффициент пропорциональности $c_з$ определяется по зависимости

$$c_з = \frac{1}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_э}}.$$

Для оценки справедливости проведённых вычислений найдём значение коэффициента пропорциональности $c_з$ при $t_x \to \infty$ и при $t_0 \to 0$ слева

$$\lim_{\substack{t_x \to \infty \\ t_0 \to 0}} c_з = 1.$$

Это соответствует ф.п.в. показательного распределения и подтверждает правильность выполненных преобразований.

Таким образом, обобщённое усечённое показательное распределение в пределе стремится к порождающему её показательному распределению. Окончательно ф.п.в. обобщённого усечённого показательного распределения имеет вид

$$f_з(t) = \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_x}} e^{-\lambda t}.$$

Графики ф.п.в. показательного и обобщённого усечённого показательного распределения показаны на рис. 4.

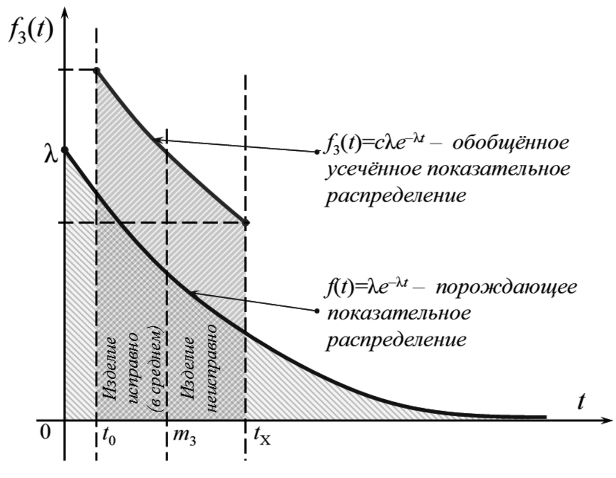


Рис. 4. Функции плотности вероятностей порождающего показательного распределения и обобщенного усечённого показательного распределения

Найдём МОЖ СВ, распределённой по обобщённому усечённому показательному распределению

$$m_{з} = \int_{t_0}^{t_{х}} t f_{з}(t)dt = \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \int_{t_0}^{t_{х}} t e^{-\lambda t} dt. \qquad (7)$$

Далее интегрируем по частям, принимая $u = t,\ e^{-\lambda t}dt = dv$, откуда $du = dt,\ v = -e^{-\lambda t}/\lambda$, тогда

$$m_{з} = \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \left[-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{t_{х}} + \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{t_{х}} e^{-\lambda t} dt \right] =$$
$$= \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \left[-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{t_{х}} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{t_{х}} \right] = \qquad (8)$$
$$= \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \left[-\frac{t_{э}}{\lambda} e^{-\lambda t_{х}} + \frac{t_0}{\lambda} e^{-\lambda t_0} - \frac{1}{\lambda^2} \left(e^{-\lambda t_{х}} - e^{-\lambda t_0} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \left[e^{-\lambda t_0} \left(t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) - e^{-\lambda t_{х}} \left(t_{х} + \frac{1}{\lambda} \right) \right].$$

Проверим справедливость полученного выражения, как и в предыдущем случае

$$\lim_{\substack{t_{х} \to \infty \\ t_0 \to 0}} \frac{1}{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_{х}}} \left[e^{-\lambda t_0} \left(t_0 + \frac{1}{\lambda} \right) - e^{-\lambda t_{х}} \left(t_{х} + \frac{1}{\lambda} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{1-0} \left[1 \left(0 + \frac{1}{\lambda} \right) - 0 \left(\infty + \frac{1}{\lambda} \right) \right].$$

Неопределённость выражения вида $\infty \times 0$ раскроем с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{t_{х} \to \infty} t_{э} e^{-\lambda t_{х}} = \lim_{t_{х} \to \infty} \frac{t_{х}}{e^{\lambda t_{х}}} = \lim_{t_{х} \to \infty} \frac{(t_{х})'}{\left(e^{\lambda t_{х}}\right)'} =$$
$$= \lim_{t_{х} \to \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda t_{х}}} = 0,$$

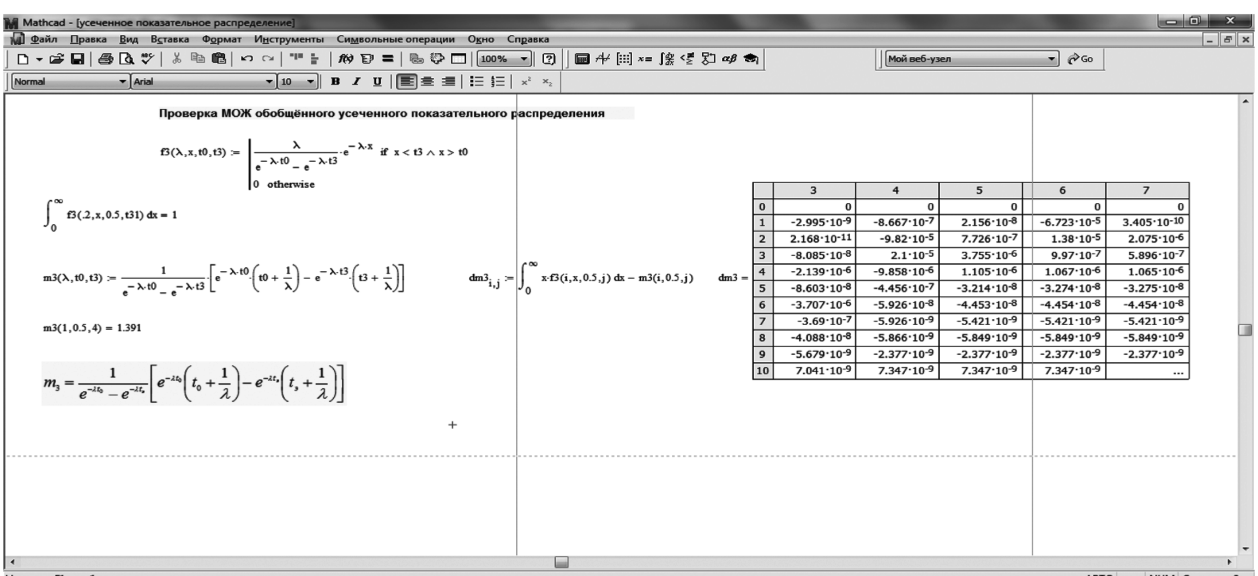
поэтому

$$\lim_{\substack{t_{х} \to \infty \\ t_0 \to 0}} m_{з} = \frac{1}{\lambda}.$$

Сходимость МОЖ обобщённого усечённого показательного распределения к МОЖ классического показательного распределения при $t_{х} \to \infty$ и $t_0 \to 0$ подтверждает правильность, выполненных преобразований. Кроме того, справедливость полученного выражения подтверждена численным методом в среде Mathcad (рис. 5) путём сравнения результатов расчётов по формулам (7) и (8).

В связи с тем, что на практике имеют место также внезапные отказы элементов невосстанавливаемых устройств, вызванные «старением» материалов, входящих в их конструкцию, при длительном хранении, то рассмотрим более сложный случай, учитывающий одновременно внезапные и постепенные отказы, обусловленные «старением» изделий.

Найдём функцию распределения $F(u)$ для минимальной из двух СВ, одна из которых распределена по нормальному закону $N(m; \sigma)$, а вторая — по показательному закону $\mathrm{Exp}(\lambda)$, т.е.



	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0
1	$-2.995\cdot10^{-9}$	$-8.667\cdot10^{-7}$	$2.156\cdot10^{-8}$	$-6.723\cdot10^{-5}$	$3.405\cdot10^{-10}$
2	$2.168\cdot10^{-11}$	$-9.82\cdot10^{-5}$	$7.726\cdot10^{-7}$	$1.38\cdot10^{-5}$	$2.075\cdot10^{-6}$
3	$-8.085\cdot10^{-8}$	$2.1\cdot10^{-5}$	$3.755\cdot10^{-6}$	$9.97\cdot10^{-7}$	$5.896\cdot10^{-7}$
4	$-2.139\cdot10^{-6}$	$-9.858\cdot10^{-6}$	$1.105\cdot10^{-6}$	$1.067\cdot10^{-6}$	$1.065\cdot10^{-6}$
5	$-8.603\cdot10^{-8}$	$-4.456\cdot10^{-7}$	$-3.214\cdot10^{-8}$	$-3.274\cdot10^{-8}$	$-3.275\cdot10^{-8}$
6	$-3.707\cdot10^{-6}$	$-5.926\cdot10^{-8}$	$-4.453\cdot10^{-8}$	$-4.454\cdot10^{-8}$	$-4.454\cdot10^{-8}$
7	$-3.69\cdot10^{-7}$	$-5.926\cdot10^{-9}$	$-5.421\cdot10^{-9}$	$-5.421\cdot10^{-9}$	$-5.421\cdot10^{-9}$
8	$-4.088\cdot10^{-8}$	$-5.866\cdot10^{-9}$	$-5.849\cdot10^{-9}$	$-5.849\cdot10^{-9}$	$-5.849\cdot10^{-9}$
9	$-5.679\cdot10^{-9}$	$-2.377\cdot10^{-9}$	$-2.377\cdot10^{-9}$	$-2.377\cdot10^{-9}$	$-2.377\cdot10^{-9}$
10	$7.041\cdot10^{-9}$	$7.347\cdot10^{-9}$	$7.347\cdot10^{-9}$	$7.347\cdot10^{-9}$	...

Рис. 5. Рабочий лист Mathcad сравнения МОЖ обобщённого усечённого показательного закона распределения

$$U = \min\{N(m;\sigma);\ \mathrm{Exp}(\lambda)\}.$$

Такая задача встречается в теории надёжности при расчёте вероятности безотказной работы изделий, когда постепенные отказы характеризуются показательным законом распределения Exp с параметром λ, а внезапные отказы — нормальным N, с МОЖ m и средним квадратическим отклонением σ. Требуется определить закон распределения времени первого отказа, т.е. минимальной из двух СВ.

В общем виде функция распределения $G(u)$ минимальной из n независимых СВ определяется выражением [5, 6, 12–14]

$$G(u) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_i(u)\right], \tag{9}$$

а ф.п.в. $g(u)$ для двух СВ имеет вид

$$g(u) = f_1(u)\left[1 - F_2(u)\right] + f_2(u)\left[1 - F_1(u)\right].$$

Далее для определённости будем искать функцию распределения (9).

Для показательного закона функция распределения имеет вид

$$F_1(u) = 1 - e^{-\lambda u},$$

а для нормального закона —

$$F_2(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u_1 - m)^2}{2\sigma^2}} du_1 .$$

В последнем выражении сделаем замену переменных, обозначив $t = (u_1 - m)/\sigma$ и перейдя, таким образом, к центрированной и нормированной нормальной СВ t. При этом $du_1 = \sigma dt$, а пределы интегрирования изменятся следующим образом

u_1	t
$-\infty$	$-\infty$
u	$(u - m)/\sigma$,

откуда

$$F_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Выражение $1 - F_2(u)$, входящее в зависимость (9), можно переписать следующим образом

$$1 - F_2(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{10}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

т.к. подынтегральное выражение (10) является ф.п.в. нормальной СВ.

Таким образом, функция надёжности $P(x) = 1 - F(x)$ для минимальной из двух СВ U окончательно будет иметь следующий вид

$$P(u) = 1 - G(u) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_i(u)\right] = \frac{e^{-\lambda u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{-\lambda u}\left[1 - F\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)\right].$$

Семейство графиков функций распределения СВ U при различных параметрах показаны на рис. 6 и 7.

Найдём МОЖ СВ U.

Функция распределения $F(x)$, ф.п.в. $f(x)$, функция надёжности $P(x) = 1 - F(x)$ и её первая производная связаны следующими соотношениями

$$f(x) = dF(x)/dt = d\left[1 - P(x)\right]/dt = -dP(x)/dt = -p(x);$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx . \tag{11}$$

В выражении (11) вычислим интеграл по частям, обозначив $u = x, dv = p(x)dx$.

Тогда

$$v = \int_{-\infty}^{x} p(x) dx = P(x),\ du = dx,$$

а

$$m_x = -uv\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} v du = -xP(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx. \tag{12}$$

Так как показательная СВ имеет ОДЗ [0; ∞), а нормальная — (−∞; ∞), то минимальная из них будет иметь ОДЗ, полученную объединением

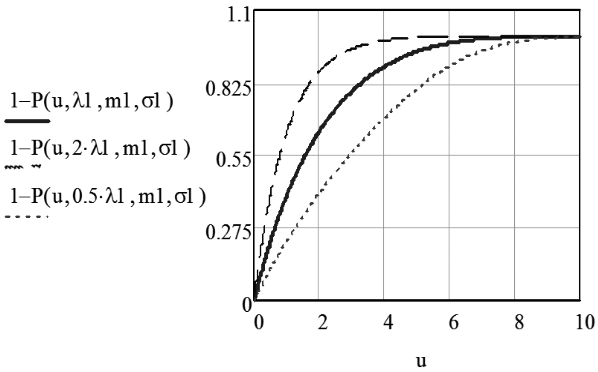


Рис. 6. Семейство функций распределения СВ U при различных параметрах: λ={1; 2; 0,5}; m = 6; σ = 2

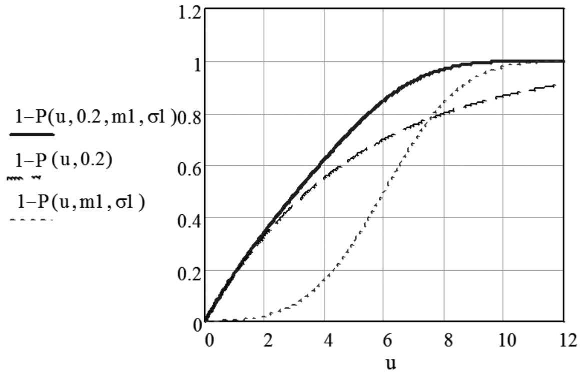


Рис. 7. Вид функций распределения СВ U при (λ = 1; m = 6; σ = 2) и Exp(λ=1)

интервалов, т.е. [0; ∞). Поэтому в дальнейшем нижнюю границу ОДЗ СВ *U* примем равной нулю.

Рассмотрим первое слагаемое выражения (12)

$$xP(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{xe^{-\lambda x}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Bigg|_0^{\infty} = \infty \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot c.$$

Неопределенность вида ∞×0 раскроем по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{\lambda x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Таким образом, первое слагаемое в выражении (12) равно нулю.

Рассмотрим второе слагаемое выражения (12), для чего введём следующие обозначения

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{0-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \; dV(x) = e^{-\lambda x} dx. \quad (13)$$

По теореме Барроу

$$dU(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Знак минус обозначает, что переменная дифференцирования находится в нижнем пределе, множитель 1/σ представляет собой производную по *x* от выражения нижнего предела, а первое выражение (13) в целом представляет собой производную сложной функции.

Из второго уравнения (13) следует

$$V(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}.$$

В принятых обозначениях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x)dx == U(x)V(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x)dU(x) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \int\limits_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Bigg|_0^{\infty} -$$
$$-\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \quad (14)$$
$$= -\frac{1}{\lambda} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot 1 \times$$
$$\times \int\limits_{\frac{0-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Вычислим первый определённый интеграл

$$\int\limits_{\frac{0-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\frac{0-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$
$$= 1 - F\left(-\frac{m}{\sigma}\right),$$

где

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

— табулированная функция Лапласа, представляющая собой функцию распределения нормальной СВ.

Преобразуем показатель степени в последнем слагаемом (14), путём выделения в нём полного квадрата

$$-\lambda x-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}=-\frac{(ax-b)^2}{2}+c\,,$$

$$\frac{-\lambda x 2\sigma^2-\left(x^2-2mx+m^2\right)}{2\sigma^2}=$$
$$=-\frac{\lambda x 2\sigma^2+x^2-2mx+m^2}{2\sigma^2}=$$
$$=-\frac{a^2x^2-2bax+b^2}{2}+c,$$

приравняв коэффициенты при равных степенях x

$$a=1/\sigma;\; ba=m/\sigma^2-\lambda;$$

$$b=m/\sigma-\lambda\sigma;$$

$$c=\lambda(\lambda\sigma^2/2-m).$$

Выполним замену переменной, обозначив $y=ax-b$.

Тогда $dx=dy/a$, а пределы интегрирования изменятся следующим образом

x	y
0	$-b$
∞	∞

В принятых обозначениях

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^\infty e^{-\frac{(ax-b)^2}{2}+c}dx=\frac{1}{a}\int_{-b}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}+c}dy=$$
$$=\frac{1}{a}e^c\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$
$$=\frac{1}{a}e^c\sqrt{2\pi}\left[F(\infty)-F(-b)\right]=$$
$$=\frac{1}{a}e^c\sqrt{2\pi}\left[1-F(-b)\right].$$

Таким образом, выражение (12) окончательно примет вид

$$m_x=-xP(x)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty P(x)\,dx=\int_0^\infty P(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left\{\begin{matrix}\left[1-F\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right]-e^{\lambda\left(\frac{\lambda\sigma^2}{2}-m\right)}\times\\ \times\left[1-F\left(-\frac{m}{\sigma}+\lambda\sigma\right)\right]\end{matrix}\right\}.$$

Найдём предел МОЖ при $m\to\infty$ и $\sigma\to 0$, исключая, таким образом, из рассмотрения нормально распределённую СВ

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \sigma\to 0}}m_\delta=\frac{1}{\lambda}\{[1-F(-\infty)]-e^{-\infty}[1-F(-\infty)]\}=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\{[1-0]-0[1-0]\}=\frac{1}{\lambda}.$$

То есть МОЖ минимальной из двух СВ в пределе стремится к МОЖ показательного закона, что подтверждает справедливость выполненных преобразований.

Следовательно получена функция распределения СВ, представляющая собой минимальную из композиции двух независимых СВ, одна из которых распределена по нормальному закону N (m; σ), а вторая — по показательному закону Exp(λ)

$$F(u)=1-\frac{e^{-\lambda u}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{u-m}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,.$$

Кроме того, получено аналитическое выражение для вычисления её МОЖ вида

$$m=\frac{1}{\lambda}\times$$
$$\times\left\{\left[1-F\left(-\frac{m}{\sigma}\right)\right]-e^{\lambda\left(\frac{\lambda\sigma^2}{2}-m\right)}\left[1-F\left(-\frac{m}{\sigma}+\lambda\sigma\right)\right]\right\}.$$

Таким образом, предложен метод определения НСХС невосстанавливаемых устройств взрывоопасных систем одноразового использования, отличающийся от существующих повышением точности прогноза данного критерия без привлечения соответствующих финансовых и материальных затрат на проведение дополнительных испытаний в условиях ресурсных ограничений и основанный на признаке безотказности рассматриваемых устройств, сущность которого заключается в определении НСХС до момента наступления первого постепенного или внезапного отказа, представляющих собой СВ, подчиняющиеся нормальному и показательному законам распределения соответственно или ими порождаемым законам: усеченному показательному и обобщённому усеченному показательному, с получением аналитических зависимостей по расчету МОЖ и дисперсии СВ времени наступления отказа как минимальной из двух СВ, распределённых по показательному и нормальному законам.

Рассчитанный срок хранения до списания является одним из назначенных критериев сохраняемости комплектующих элементов и в целом ВОСОИ. Следует отметить, что получаемые оценки НСХС учитывают только безотказность невосстанавливаемых элементов боеприпасов и не учитывают такие показатели, как безопасность хранения и экономические расходы в пределах назначенного срока хранения до списания.

Литература

1. ГОСТ 27.003-2016 Надежность в технике. Состав и общие правила задания требований по надежности. — М.: Стандартинформ. 2018. 19 с.

2. ГОСТ РВ 15.702-94 Система разработки и постановки продукции на производство. Военная техника. Порядок установления и продления назначенного ресурса, срока службы, срока хранения. — М. Изд-во стандартов. 1994. 39 с.

3. Мясников А.С. Определение срока службы невосстанавливаемых устройств / А.С. Мясников // Научное издание «Наука и образование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эл № ФС 77–48211. ISSN 1994-0408. — М.: МГТУ. 2008.

4. Курков Д.С. Построение моделей прогнозирования степени коррозионного поражения боеприпасов при длительном хранении на территории России / В.И. Волчихин, Д.С. Курков, Д.В. Загарских // Известия РАРАН. 2017. № 3 (99). С. 13–19.

5. Шестаков А.В. Теория вероятностей. Ч. I. — Пенза: ВАИУ. Переизд. 2001. 224 с.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учебник. 9 изд. — М.: Издательский центр «Академия». 2003. 576 с.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Учебное пособие. 3 изд. — М.: Издательский центр «Академия». 2003. 464 с.

8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учеб. пособие. 5-е изд. — М.: Издательский центр «Академия». 2004. 440 с.

9. Есиков О.В., Улогов А.В. Вероятностные методы исследования систем военного назначения. Учебное пособие. — Тула: АИИ. 2006. 124 с.

10. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. — М.: Издательство «Высшая школа». 2009.

11. Мхитарян В.С. Теория вероятностей и математическая статистика с использованием MS Excel. Учебник и практикум в 2-х частях. Ч. 2. Математическая статистика / В.С. Мхитарян, В.Ф. Шишов, А.Ю. Козлов, Д.В. Искоркин // — М.: Курс. 2019. 304 с.

12. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Наука. 1980. 208 с.

13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Высшая школа.2000. 383 с.

14. Волчихин В.И., Курков Д.С., Искоркин Д.В. О новом методе определения критерия сохраняемости невосстанавливаемых устройств взрывоопасных систем одноразового использования // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2020. № 3 (55). С. 109–125.